

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN ĐỨC DŨNG

VỀ KIỂU ĐA THỨC DÃY VÀ CHỈ SỐ KHẢ QUY
CỦA MÔĐUN TRÊN VÀNH GIAO HOÁN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN ĐỨC DŨNG

VỀ KIỂU ĐA THỨC DÂY VÀ CHỈ SỐ KHẢ QUY
CỦA MÔĐUN TRÊN VÀNH GIAO HOÁN

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 9 46 01 04

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Tập thể hướng dẫn:

GS.TSKH. Nguyễn Tự Cường

GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn

Thái Nguyên - 2019

Tóm tắt

Cho (R, \mathfrak{m}) là một vành giao hoán, Noether địa phương. Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều d và A là một R -môđun Artin.

Luận án tập trung nghiên cứu hai vấn đề. Thứ nhất, chúng tôi giới thiệu khái niệm kiểu đa thức dãy của M , kí hiệu là $\text{sp}(M)$, để đo tính không Cohen-Macaulay dãy của M . Chúng tôi chứng minh rằng $\text{sp}(M)$ chính là chiều của quỹ tích không Cohen-Macaulay dãy của M nếu R là thương của vành Cohen-Macaulay địa phương. Chúng tôi cũng nghiên cứu sự thay đổi của kiểu đa thức dãy của M qua đầy đủ hóa, qua địa phương hóa cũng như tính không tăng của $\text{sp}(M/xM)$ khi x là một phần tử tham số. Chúng tôi tính toán $\text{sp}(M)$ thông qua các môđun khuyết thiếu của M .

Vấn đề nghiên cứu thứ hai là về chỉ số khả quy của môđun Noether hoặc môđun Artin. Trước hết, chúng tôi đưa ra chặn trên cho chỉ số khả quy của các idêan tham số tốt khi kiểu đa thức dãy của môđun Noether M là nhỏ. Sau đó, chúng tôi so sánh chỉ số khả quy của môđun con của M và chỉ số khả quy của đối ngẫu Matlis của môđun thương tương ứng của M .

Luận án được chia thành ba chương. Chương 1 dành để nhắc lại một số kiến thức cơ sở như môđun đối đồng điều địa phương, biểu diễn thứ cấp của môđun Artin, kiểu đa thức, môđun Cohen-Macaulay, môđun Cohen-Macaulay suy rộng, môđun Cohen-Macaulay dãy và môđun Cohen-

Macaulay suy rộng dãy.

Trong Chương 2, chúng tôi giới thiệu khái niệm kiểu đa thức dãy của M , kí hiệu là $\text{sp}(M)$, thông qua kiểu đa thức của các môđun thương trong lọc chiều. Chúng tôi nghiên cứu kiểu đa thức dãy dưới tác động địa phương hóa và đầy đủ \mathfrak{m} -adic. Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ giữa $\text{sp}(M)$ và $\text{sp}(M/xM)$ với x là phần tử tham số của M . Khi R là thương của vành Gorenstein địa phương, chúng tôi tính toán kiểu đa thức dãy của M thông qua chiều và kiểu đa thức của các môđun khuyết thiếu của M .

Trong Chương 3, chúng tôi nghiên cứu một số vấn đề về chỉ số khả quy của môđun. Trước hết, chúng tôi đưa ra công thức chặn trên cho chỉ số khả quy của các idêan tham số tốt \mathfrak{q} của M với $\text{sp}(M) \leq 1$. Phần cuối của Chương dành để nghiên cứu chỉ số khả quy của môđun Artin và đưa ra sự so sánh giữa chỉ số khả quy của môđun con của M với chỉ số khả quy của Đối ngẫu Matlis của môđun thương tương ứng của M .

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của các đồng tác giả trước khi đưa vào luận án. Các kết quả được nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Trần Đức Dũng

Lời cảm ơn

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn đến Thầy tôi: GS. TSKH Nguyễn Tự Cường. Thầy đã dìu dắt tôi từ những bước chập chững đầu tiên trên con đường nghiên cứu khoa học, hướng dẫn tôi từ khi tôi làm luận văn thạc sĩ và giờ đây là luận án tiến sĩ. Phương pháp đọc sách, cách phát hiện và giải quyết vấn đề, những ý tưởng toán học mà Thầy chỉ bảo đã giúp tôi trưởng thành hơn trong nghiên cứu và hoàn thành luận án này. Trong công việc, Thầy luôn nghiêm khắc với học trò, trong cuộc sống thầy luôn dành cho học trò của mình những tình cảm ấm áp và sự yêu thương. Bên cạnh những kiến thức toán học, Thầy như người cha dạy cho tôi biết cách làm người tử tế và sống nhân hậu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến Cô tôi: GS.TS. Lê Thị Thanh Nhân. Cô là tấm gương về sự nỗ lực trong gian khó và cùng là người đã truyền cảm hứng cho tôi về Toán học nói chung cũng như Đại số giao hoán nói riêng khi tôi còn ngồi trên giảng đường Đại học. Cô đã bỏ ra rất nhiều công sức và sự kiên nhẫn để không chỉ dẫn dắt, giảng dạy cho tôi về kiến thức, kinh nghiệm và tư duy của người làm Toán, mà còn luôn tạo điều kiện, giúp đỡ cho tôi trong công việc, trong cuộc sống. Sự tận tâm với nghề, với học trò của cô sẽ là cái đích để tôi noi theo và phấn đấu.

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của hai người Thầy: GS. TSKH Nguyễn Tự Cường và GS.TS. Lê Thị Thanh

Nhàn. Một lần nữa, tôi xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy Cô và sẽ cố gắng hơn nữa để xứng đáng với công lao của Thầy Cô.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Phòng Sau Đại học, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi nhất, phù hợp nhất để tôi vừa hoàn thành việc học tập, vừa đảm bảo công việc giảng dạy của mình tại Trường.

Tôi xin cảm ơn PGS.TS Phạm Hùng Quý, TS Đoàn Trung Cường, TS Trần Nguyên An, TS Trần Đỗ Minh Châu đã dành cho tôi những tình cảm thân thiết và giải đáp nhiều thắc mắc chuyên môn cho tôi trong suốt chặng đường dài tôi làm NCS. Xin cảm ơn các anh chị nhóm Đại số giao hoán Thái Nguyên về những trao đổi quý báu trong quá trình làm luận án.

Cuối cùng, tôi xin được bày tỏ sự biết ơn vô hạn tới Bố, Mẹ. Đặc biệt là Vợ Phạm Thùy Linh và công chúa nhỏ Trần Phạm Ngân Khánh, những người đã luôn hy sinh rất nhiều, luôn lo lắng, mong mỏi tôi tiến bộ từng ngày, từng tháng. Luận án này tôi xin được dành tặng cho những người mà tôi yêu thương.

Tác giả

Trần Đức Dũng

Mục lục

Mở đầu	2
1 Kiến thức chuẩn bị	11
1.1 Môđun đối đồng điều địa phương	11
1.2 Môđun Cohen-Macaulay và kiểu đa thức	16
1.3 Môđun Cohen-Macaulay dãy và môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy	19
2 Kiểu đa thức dãy của môđun	23
2.1 Lọc chiều và dãy lọc chính quy chặt	24
2.2 Kiểu đa thức dãy qua địa phương hóa và đầy đủ hóa . .	31
2.3 Mối quan hệ giữa $\text{sp}(M)$ và $\text{sp}(M/xM)$ với x là phần tử tham số	46
2.4 Tính chất đồng điều của kiểu đa thức dãy	54
3 Chỉ số khả quy của môđun	58
3.1 Chỉ số khả quy của môđun Noether	59
3.2 Chỉ số khả quy với kiểu đa thức dãy nhỏ	62
3.3 Chỉ số khả quy của môđun Artin và đối ngẫu Matlis . .	76
Kết luận	85
Tài liệu tham khảo	89

Mở đầu

Cho (R, \mathfrak{m}) là một vành giao hoán, Noether địa phương với idêan cực đại duy nhất \mathfrak{m} và M là một R -môđun hữu hạn sinh chiều d . Ta luôn có $\text{depth } M \leq \dim M$. Khi $\text{depth } M = \dim M$ thì môđun M được gọi là *môđun Cohen-Macaulay*. Lớp môđun Cohen-Macaulay đóng vai trò trung tâm trong Đại số giao hoán và xuất hiện trong nhiều lĩnh vực nghiên cứu khác nhau của Toán học như Hình học đại số, Lý thuyết Tổ hợp, Lý thuyết bất biến...

Chú ý rằng M là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $\ell(M/\underline{x}M) = e(\underline{x}; M)$ với một (và với mọi) hệ tham số \underline{x} của M . Một trong những mở rộng quan trọng của lớp môđun Cohen-Macaulay là lớp môđun Buchsbaum do J. Stückrad và W. Vogel [49] giới thiệu, đó là lớp các môđun M thỏa mãn giả thuyết đặt ra bởi D.A. Buchsbaum: $\ell(M/\underline{x}M) - e(\underline{x}; M)$ là hằng số không phụ thuộc hệ tham số \underline{x} . Sau đó, N.T. Cường, P. Schenzel và N.V. Trung [48] đã giới thiệu lớp các môđun M thỏa mãn $\sup_{\underline{x}}(\ell(M/\underline{x}M) - e(\underline{x}; M)) < \infty$, được gọi là *môđun Cohen-Macaulay suy rộng*. Năm 1991, N.T. Cường [5] đã giới thiệu khái niệm kiểu đa thức của M , kí hiệu là $p(M)$, để đo tính không Cohen-Macaulay của M , từ đó phân loại và nghiên cứu cấu trúc của các môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương. Nếu ta quy ước bậc của đa thức không là -1 , thì M là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $p(M) = -1$ và M là Cohen-Macaulay

suy rộng khi và chỉ khi $p(M) \leq 0$.

Một mở rộng quan trọng khác của lớp môđun Cohen-Macaulay là lớp Cohen-Macaulay dãy, được R.P. Stanley [41] giới thiệu cho trường hợp phân bậc và P. Schenzel [39], N.T. Cường, L.T. Nhân [11] nghiên cứu cho trường hợp địa phương: M là *Cohen-Macaulay dãy* nếu mỗi thương D_i/D_{i+1} là Cohen-Macaulay, trong đó $D_0 = M$ và D_{i+1} là môđun con lớn nhất của M có chiều nhỏ hơn $\dim D_i$ với mọi $i \geq 0$. Tiếp theo, N.T. Cường và L.T. Nhân [11] nghiên cứu lớp môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy bằng cách thay điều kiện mỗi môđun thương D_i/D_{i+1} là Cohen-Macaulay bằng điều kiện D_i/D_{i+1} là Cohen-Macaulay suy rộng.

Mục đích đầu tiên của luận án là giới thiệu khái niệm kiểu đa thức dãy của M , kí hiệu là $sp(M)$, để đo tính không Cohen-Macaulay dãy của M . Chúng tôi chỉ ra rằng $sp(M)$ chính là chiều của quỹ tích không Cohen-Macaulay dãy của M khi R là thương của vành Cohen-Macaulay địa phương. Chúng tôi nghiên cứu sự thay đổi của kiểu đa thức dãy của M qua địa phương hoá, qua đầy đủ hoá cũng như tính không tăng của $sp(M/xM)$ khi x là một phần tử tham số. Chúng tôi tính toán $sp(M)$ thông qua chiều và kiểu đa thức của các môđun khuyết thiếu của M . Chú ý rằng trong bài báo [8], N.T. Cường, Đ.T. Cường và H.L. Trường đã nghiên cứu một bất biến mới của M thông qua số bội, và khi vành cơ sở là thương của vành Cohen-Macaulay địa phương thì bất biến này chính là kiểu đa thức dãy của M . Gần đây, S. Goto và L.T. Nhân [21] đã đưa ra đặc trưng tham số của kiểu đa thức dãy.

Mục tiêu thứ hai của luận án là nghiên cứu một số bài toán về chỉ số khả quy của các môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương. Một môđun con N của M là *bất khả quy* nếu $N \neq M$ và N không thể viết thành giao của hai môđun con thực sự chứa nó. Khi đó, định lý cơ bản thứ hai của E. Noether [29] nói rằng mỗi môđun con N của M đều phân